

دروس مهمة

الرياضيات

الثالثة ثانوي

علوم تجريبية ، رياضيات ، تقني رياضي

الموقع الأول

www.AOUAL.com

الباب الخامس

الأعداد المركبة

الأنشطة

النشاط الأول

تصحيح: /

الهدف: تذكير حول الإحداثيات القطبية.

توجيهات: يقدم النشاط ضمن أفواج.

الحل: بسيط

النشاط الثاني

تصحيح: /

الهدف: مقارنة مفهوم العدد المركب.

توجيهات: يقدم النشاط ضمن أفواج.

الحل: بسيط

النشاط الثالث

تصحيح: /

الهدف: التمثيل الهندسي لعد مركب.

توجيهات: يقدم النشاط ضمن أفواج.

الحل: بسيط

ملاحظة: تقدم الأنشطة الثلاثة كمدخل لهذا الباب.

الأعمال الموجهة

معادلات يؤول حلها إلى الدرجة الثانية

تصحيح: /

الهدف: توظيف المعادلات من الدرجة الثانية.

توجيهات: يمكن تقديم العمل في شكل أفواج كما يمكن اقتراحه كواجب منزلي.

الحل: بسيط

الجزور النونية لعدد مركب غير معدوم

تصحيح: /

الهدف: تعيين الجزور النونية لعدد مركب غير معدوم.

توجيهات: يقدم العمل في شكل أفواج .

الحل: بسيط

التمارين

تمارين تطبيقية

في كل التمارين ينسب المستوي المركب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O; \vec{u}; \vec{v})$.

1 - الأعداد المركبة .

6 A نقطة من المستوي لاحتقتها العدد المركب $a = -1 + 2i$ ؛ عيّن العدد المركب z بحيث تكون صورته

– M نظيرة النقطة A بالنسبة إلى مبدأ المعلم ؛ $z = 1 - 2i$.

– M نظيرة النقطة A بالنسبة إلى حامل محور الفواصل ؛ $z = -1 - 2i$.

– M نظيرة النقطة A بالنسبة إلى حامل محور الترتيب ؛ $z = 1 + 2i$.

– M نظيرة النقطة A بالنسبة إلى المنصف الأول ؛ $z = 2 - i$.

2 - مرافق عدد مركب .

7 $\bar{z}_1 = 2 - 4i$ ؛ $\bar{z}_2 = 3 + i$ ؛ $\bar{z}_3 = -3 - i\sqrt{3}$ ؛ $\bar{z}_4 = \frac{5}{2}i$.

3 - العمليات في مجموعة الأعداد المركبة .

19 A ، B ، C و D أربع نقط من المستوي لواحقتها على الترتيب $-2 + i$ ، $-1 + 4i$ ، $3 + 2i$ و $2 - i$.

$$z_C - z_D = (3 + 2i) - (2 - i) = 1 + 3i ، z_B - z_A = (-1 + 4i) - (-2 + i) = 1 + 3i$$

ومنه $z_C - z_D = z_B - z_A$ أي $\overline{AB} = \overline{DC}$ وبالتالي $ABCD$ هو متوازي أضلاع .

4 - طولية وعمدة عدد مركب .

30 z_A ، z_B ، z_C و z_D هي على الترتيب ، لواحق النقط $A(\sqrt{3}; 1)$ ، $B(-\sqrt{3}; -1)$ ، $C(0; 2)$ و $D(\sqrt{3}; 3)$.

(1) $|z_A| = \sqrt{4} = 2$ ، $|z_B| = 2$ و $|z_C| = 2$. النقط A ، B و C تنتمي إلى الدائرة ذات المركز O ونصف القطر 2 .

$$(2) CD = |z_D - z_C| = |\sqrt{3} + i| = 2 ، AD = |z_D - z_A| = |2i| = 2$$

ومنه $AO = OC = CD = DA = 2$ إذن $AOCD$ معين .

37 z عدد مركب غير معدوم طوليته r و عمدة له .

$$\cdot \operatorname{Arg}\left(\frac{1}{z}\right) = -\theta \text{ و } \left|\frac{1}{z}\right| = \frac{1}{|z|} = \frac{1}{r} \quad \cdot \operatorname{Arg}(\bar{z}) = -\theta \text{ و } |\bar{z}| = r \quad \cdot \operatorname{Arg}(-z) = \theta + \pi \text{ و } |-z| = r$$

$$\left| \frac{1}{z^n} \right| = \frac{1}{|z^n|} = \frac{1}{|z|^n} = \frac{1}{r^n} \quad \cdot \quad \text{Arg}(z^3) = 3\theta \quad \text{و} \quad |z^3| = |z|^3 = r^3$$

$$\text{Arg}\left(\frac{1}{z^n}\right) = -\text{Arg}(z^n) = -n\text{Arg}(z) = -n\theta \quad \text{و}$$

5 - الشكل المثلثي لعدد مركب غير معدوم .

$$\cdot z_1 = \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i = \cos\frac{\pi}{4} + i \sin\frac{\pi}{4} \quad 41$$

$$\cdot z_2 = -\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i = \cos\frac{3\pi}{4} + i \sin\frac{3\pi}{4}$$

$$\cdot z_3 = -\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}i = \cos\frac{5\pi}{4} + i \sin\frac{5\pi}{4}$$

$$\cdot z_2 = -\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i = \cos\frac{5\pi}{6} + i \sin\frac{5\pi}{6}, \quad z_1 = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i = \cos\frac{\pi}{6} + i \sin\frac{\pi}{6} \quad 42$$

$$\cdot z_4 = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i = \cos\frac{4\pi}{3} + i \sin\frac{4\pi}{3}, \quad z_3 = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i = \cos\frac{2\pi}{3} + i \sin\frac{2\pi}{3}$$

$$\cdot z_2 = -\sqrt{5} = \sqrt{5}(\cos\pi + i \sin\pi), \quad z_1 = 3 = 3(\cos 0 + i \sin 0) \quad 43$$

$$\cdot z_4 = \frac{1}{2}i = \frac{1}{2}\left(\cos\frac{\pi}{2} + i \sin\frac{\pi}{2}\right), \quad z_3 = i = \cos\frac{\pi}{2} + i \sin\frac{\pi}{2}$$

$$\cdot z_5 = -7i = 7\left(\cos\frac{3\pi}{2} + i \sin\frac{3\pi}{2}\right)$$

$z = x$ ؛ إذا كان $x > 0$ فإن $z = x(\cos 0 + i \sin 0)$ وإذا كان $x < 0$ فإن $z = -x(\cos \pi + i \sin \pi)$

$z = yi$ ؛ إذا كان $y > 0$ فإن $z = y\left(\cos\frac{\pi}{2} + i \sin\frac{\pi}{2}\right)$ وإذا كان $y < 0$ فإن $z = -y\left(\cos\frac{3\pi}{2} + i \sin\frac{3\pi}{2}\right)$

$$\cdot z_1 = 1 + i = \sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + i \frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i \sin\frac{\pi}{4}\right) \quad 44$$

$$\cdot z_2 = 3 - 3i = 3\sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2} - i \frac{\sqrt{2}}{2}\right) = 3\sqrt{2}\left(\cos\frac{7\pi}{4} + i \sin\frac{7\pi}{4}\right)$$

$$\cdot z_3 = -\sqrt{5} - i\sqrt{15} = 2\sqrt{5}\left(-\frac{1}{2} - i \frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 2\sqrt{5}\left(\cos\frac{4\pi}{3} + i \sin\frac{4\pi}{3}\right)$$

$$\cdot z_4 = -\sqrt{6} + i\sqrt{2} = 2\sqrt{2}\left(-\frac{\sqrt{3}}{2} + i \frac{1}{2}\right) = 2\sqrt{2}\left(\cos\frac{5\pi}{6} + i \sin\frac{5\pi}{6}\right)$$

$$\cdot Z = \frac{4+4i}{1-i\sqrt{3}} \quad \text{نعتبر العدد المركب } Z = \frac{4+4i}{1-i\sqrt{3}} \quad 46$$

$$\cdot Z = \frac{4+4i}{1-i\sqrt{3}} = \frac{(4+4i)(1+i\sqrt{3})}{4} = 1 - \sqrt{3} + (1+\sqrt{3})i \quad (1)$$

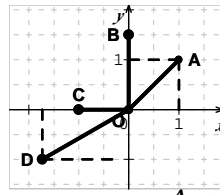
$$. Z = \frac{4\sqrt{2} \left(\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4} \right)}{2 \left(\cos -\frac{\pi}{6} + i \sin -\frac{\pi}{6} \right)} = 2\sqrt{2} \left(\cos \frac{5\pi}{12} + i \sin \frac{5\pi}{12} \right) \quad (2)$$

$$\therefore Z^{2009} = (2\sqrt{2})^{2009} \left(\cos \frac{\pi}{12} + i \sin \frac{\pi}{12} \right) ; \frac{1}{Z} = \frac{1}{2\sqrt{2}} \left(\cos -\frac{5\pi}{12} + i \sin -\frac{5\pi}{12} \right) \quad (3)$$

$$. \bar{Z} = 2\sqrt{2} \left(\cos -\frac{5\pi}{12} + i \sin -\frac{5\pi}{12} \right)$$

6 – الشكل الأسّي لعدد مركب غير معدوم .

$$. Arg(z_A) = \frac{\pi}{4} \text{ و } OA = |z_A| = \sqrt{2} \text{ ومنه } z_A = \sqrt{2} e^{i\frac{\pi}{4}} \quad 48$$



$$. Arg(z_B) = \frac{\pi}{2} \text{ و } OB = |z_B| = \frac{3}{2} \text{ ومنه } z_B = \frac{3}{2} e^{i\frac{\pi}{2}}$$

$$. Arg(z_C) = \pi \text{ و } OC = |z_C| = 1 \text{ ومنه } z_C = e^{i\pi}$$

$$. Arg(z_D) = -\frac{5\pi}{6} \text{ و } OD = |z_D| = 2 \text{ ومنه } z_D = 2e^{-i\frac{5\pi}{6}}$$

$$. 6e^{i\frac{3\pi}{4}} = 6 \left(\cos \frac{3\pi}{4} + i \sin \frac{3\pi}{4} \right) = 6 \left(-\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} i \right) = -3\sqrt{2} + 3i\sqrt{2} \quad 49$$

$$. \sqrt{5} e^{i\frac{3\pi}{2}} = \sqrt{5} \left(\cos \frac{3\pi}{2} + i \sin \frac{3\pi}{2} \right) = -i\sqrt{5}$$

$$. \frac{1}{2} e^{i\pi} = \frac{1}{2} (\cos \pi + i \sin \pi) = -\frac{1}{2}$$

$$. 2\sqrt{3} e^{-i\frac{2\pi}{3}} = 2\sqrt{3} \left(\cos -\frac{2\pi}{3} + i \sin -\frac{2\pi}{3} \right) = 2\sqrt{3} \left(-\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} i \right) = -\sqrt{3} - 3i$$

7 – المعادلات من الدرجة الثانية .

$$. z'' = \frac{3+i}{2} , z' = \frac{3-i}{2} ; \Delta' = -1 = i^2 ; 2z^2 - 6z + 5 = 0 \quad \text{أ} \quad 56$$

$$. z = -i\sqrt{3} \text{ أو } z = i\sqrt{3} \text{ ويكافئ } z^2 = 3i^2 \text{ معناه } z^2 + 3 = 0 \text{ و}$$

$$. z^2 + 2z + 5 = 0 \text{ هما حلا للمعادلة } z_2 \text{ و } z_1 ; \begin{cases} z_1 z_2 = 5 \\ z_1 + z_2 = -2 \end{cases} \quad 58$$

الباب السادس

التشابه المباشِر

الأنشطة

النشاط الأول

تصحيح: /

الهدف: مقارنة مفهوم التشابه المباشر.

توجيهات: يقدم النشاط كمدخل لهذا الباب و يتوج بتقديم فقرة " التشابه المباشر " .

الحل: بسيط

النشاط الثاني

تصحيح: /

الهدف: مقارنة مفهوم التشابه المباشر.

توجيهات: يقدم النشاط كمدخل لهذا الباب و يتوج بتقديم فقرة " التشابه المباشر " .

الحل: بسيط

النشاط الثالث

تصحيح: /

الهدف: مقارنة مفهوم الكتابة القانونية للتشابه المباشر.

توجيهات: يقدم النشاط ضمن أفواج و يتوج بتقديم الفقرة " الكتابة القانونية للتشابه المباشر " .

الحل: بسيط.

الأعمال الموجهة

تحويل نقطي كتابته المركبة $z' = a\bar{z} + b$

تصحيح: /

الهدف: توظيف التشابه المباشر.

توجيهات: يمكن تقديم العمل في شكل أفواج كما يمكن اقتراحه كواجب منزلي.

الحل: بسيط

المثلثات المتشابهة

تصحيح: /

الهدف: توظيف التشابه المباشر.

توجيهات: يمكن تقديم العمل في شكل أفواج كما يمكن اقتراحه كواجب منزلي.

الحل: بسيط

نتائج التشابه المباشر

تصحيح: /

الهدف: إبراز التغييرات التي يحدثها التشابه المباشر على صور بعض الأشكال الهندسية.

توجيهات: يمكن تقديم العمل في شكل أفواج كما يمكن اقتراحه كواجب منزلي.

الحل: بسيط

التمارين

تمارين تطبيقية

1 - التشابه المباشر في المستوي.

$$1 \quad \frac{A'B'}{AB} = \frac{B'C'}{BC} = \frac{C'A'}{CA} = 3 \quad (2)$$

$$2 \quad \frac{A'B'}{AB} = \frac{B'C'}{BC} = \frac{C'A'}{CA} = 2 \quad (2)$$

$$5 \quad M'N' = \sqrt{2}MN \quad (1)$$

(2) المعادلة $z = (1+i)z + 4$ تقبل حلا وحيدا $z = 4i$ وهو لاحقة النقطة A .

$$3 \quad \left(\overline{AM}; \overline{AM'} \right) = \arg(1+i) = \frac{\pi}{4} ; \frac{AM'}{AM} = \sqrt{2}$$

(4) مما سبق ينتج $\frac{B'C'}{BC} = \frac{B'D'}{BD} = \frac{C'D'}{CD} = \sqrt{2}$ إذن المثلثان BCD و $B'C'D'$ متشابهان .

2 - تحديد التشابه المباشر.

$$10 \quad (1) \text{ النسبة هي } \frac{AK}{AB} = \frac{\sqrt{2}}{2} \text{ والزاوية } \frac{\pi}{4}$$

$$(2) \text{ النسبة } \sqrt{2} \text{ والزاوية } \frac{\pi}{4}$$

$$(3) \text{ النسبة } \sqrt{2} \text{ والزاوية } \frac{\pi}{4}$$

$$11 \quad (1) \frac{\sqrt{3}}{2} ; \frac{\pi}{6} \quad (2) \frac{\sqrt{3}}{3} ; -\frac{\pi}{2} \quad (3) \frac{2}{3} ; \frac{\pi}{6} \quad (4) \frac{1}{2} ; -\frac{\pi}{3}$$

3 - العبارة المركبة للتشابه المباشر.

$$16 \quad (2) z' = \left(-\frac{9}{2} + \frac{9\sqrt{3}}{2}i \right) z + \frac{6\sqrt{3}+5}{2} - \frac{3\sqrt{3}-10}{2}i$$

17 ب - التحويل T معرف بـ $z' = (1+i)z - i$ وهو تشابه مباشر مركزه $\Omega(1)$ ، زاويته $\frac{\pi}{4}$ ونسبته $\sqrt{2}$.

5 – الأشكال الهندسة بالتشابه المباشر.

26 أ – نسبة S هي $\frac{1}{2}$ وزاويته $\frac{\pi}{3}$ خاطئة.

ب – $S(A) = C$ خاطئة .

ج – صورة المثلث $OC D$ هي المثلث OAB بالتشابه S صحيحة.

د – S^{-1} هو التشابه المباشر الذي مركزه O ، نسبته 2 وزاويته $\frac{\pi}{3}$ صحيحة .

تمارين للتعمق

1 – العبارة المركبة للتشابه المباشر.

35 (1) $A(0)$ ، $C(8+8i)$ ، $P(4+4i)$ و $Q(4+8i)$.

(2) $\alpha = \frac{1}{4}(1+\alpha)$ و $\beta = 0$.

(3) $\lambda = \frac{\sqrt{2}}{4}$ و $\theta = \frac{\pi}{4}$.

(4) $\omega = \frac{16}{5}(1+2i)$

3 – الأشكال الهندسة بالتشابه المباشر.

50 (1) أ – نحصل على النتيجة بحل المعادلة $z = -\frac{3}{4}iz + 9i$.

(2) أ – $f(A) = O$ و $f(O) = B$.

ب – $\overline{O\Omega} \overline{A\Omega} = 0$ إذن $\Omega \in \mathcal{C}_1$ ولدينا $f(\mathcal{C}_1) = \mathcal{C}_2$ و $f(\Omega) = \Omega$ إذن $\Omega \in \mathcal{C}_2$

ج – $(O\Omega) \perp (A\Omega)$ و $(O\Omega) \perp (B\Omega)$ إذن المستقيمان $(A\Omega)$ و $(B\Omega)$ منطبقان أي $(AB) \perp (O\Omega)$ ومنه Ω

هي المسقط العمودي للنقطة O على (AB) .

لدينا $f(A) = O$ و $f(O) = B$ و $f(\Omega) = \Omega$ إذن $\frac{\Omega O}{\Omega B} = \frac{\Omega A}{\Omega O}$ ومنه $\Omega A \times \Omega B = \Omega O^2$.

الباب السابع

الجداء السلمي

الأنشطة

النشاط الأول :

- توظيف الجداء السلمي لإثبات تعامد مستقيمين ، تعامد مستويين و تعامد مستقيم و مستوي .
النشاط الثاني :

- توظيف الجداء السلمي لإثبات تعامد مستقيمين ، تعامد مستويين و تعامد مستقيم و مستوي .
النشاط الثالث :

- توظيف الجداء السلمي لإثبات تعامد مستقيمين ، تعامد مستويين و تعامد مستقيم و مستوي .
النشاط الرابع :

- توظيف الجداء السلمي لإثبات تعامد مستقيمين ، تعامد مستويين و تعامد مستقيم و مستوي .
- توظيف الجداء السلمي لحساب المسافة بين نقطة و المستوي .

النشاط الخامس :

- توظيف الجداء السلمي لتعيين مجموعات النقط .

النشاط السادس :

- توظيف الجداء السلمي لحساب المسافة بين نقطة و المستوي .

الأعمال الموجهة (1)

$$(k^2 + 1)\vec{G_k A} + k\vec{G_k B} - k\vec{G_k C} = \vec{0} \quad \text{أ) لدينا } (2)$$

$$(k^2 + 1)\vec{G_k A} = k(\vec{BA} - \vec{AC}) \quad \text{و منه}$$

$$\vec{G_k A} = \frac{k}{k^2 + 1}\vec{BC} \quad \text{أي } (k^2 + 1)\vec{G_k A} = k\vec{BC} \quad \text{و بالتالي}$$

$$\| \vec{MG_1} \| = \| \vec{MG_{-1}} \| \quad \text{مجموعة النقط (E) المستوي المحوري للقطعة } [G_1 G_{-1}] \quad (3)$$

$$\| 2\vec{MG_1} \| = \| 2\vec{MA} - \vec{MB} + \vec{MC} - 2\vec{MC} \| \quad (4)$$

$$= \| 2\vec{MG_1} - 2\vec{MC} \|$$

$$= \| \vec{G_1 C} \|$$

مجموعة النقط (F) هي الكرة التي مركزها G_1 و نصف قطرها $R = G_1 C$

$$G_{-1}(0;0;8) ; G_2(0;0;2) ; G_1(0;0;0) \quad \text{أ) (5)}$$

$$\frac{G_1 G_{-1}}{2} = 3 < R = \sqrt{30} \quad \text{أي مجموعتي النقط (E) و (F) متقاطعتان}$$

$$\text{ب) معادلة دائرة التقاطع تنتج من حل الجملة} \quad \begin{cases} (E): z = 4 \\ (F): x^2 + y^2 + z^2 = 30 \end{cases} \quad \text{أي } (C): x^2 + y^2 = 26$$

الأعمال الموجهة (2) :

$$(1) \text{ أ) بما أن } \vec{GO} + \vec{GA} + 3\vec{GC} = \vec{0} \quad \text{فإن } \{(O;1); (A;1); (C;3)\} \text{ مرجح الجملة}$$

ينتج $5\overline{GC} = \overline{Aj} + \overline{OJ} + 2\overline{JC}$ أي $5\overline{GC} = \overline{AC} + \overline{OC}$
 و مادام $\overline{Aj} + \overline{OJ} = \overline{0}$ ينتج $5\overline{GC} = 2\overline{JC}$ و بالتالي الشعاعان $5\overline{GC}$; $2\overline{JC}$ مرتبطان .

$$G\left(\frac{1}{5}; \frac{3}{5}; 0\right) \quad (2)$$

$$\overline{MO} + \overline{MA} + 3\overline{MC} = 5\overline{MG} \quad (1 \parallel)$$

$$\overline{MG} = \overline{MB} \quad \text{تكافئ} \quad (\overline{MO} + \overline{MA} + 3\overline{MC}) \cdot \overline{MB} = 0 \quad (2)$$

(E) هي كرة قطرها [GB]

تمارين

$$\overline{AC} \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \overline{AB} \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \mathbf{2}$$

لدينا $\overline{AB} \cdot \overline{AC} = 4 \times (-1) + (-1)(3) + (2)(-4) = -15$ و $\|\overline{AB}\| = \sqrt{4^2 + (-1)^2 + 2^2} = \sqrt{21}$

$$\|\overline{AC}\| = \sqrt{26} \quad \text{و}$$

$$\cos \widehat{BAC} = \frac{\overline{AB} \cdot \overline{AC}}{\|\overline{AB}\| \cdot \|\overline{AC}\|} = \frac{-15}{\sqrt{546}} \approx -0,6419 \quad \text{و بالتالي} \quad \widehat{BAC} \approx 130^\circ \quad \text{ومنه}$$

و نفس الحسابات من أجل الأسئلة المتبقية .

$\overline{AM} \cdot \vec{u} = 0$ ، لدينا $M \in (P)$ لتكن نقطة من المستوي (P) $\mathbf{13}$

و منه معادلة (P) هي : $x + 2z - 7 = 0$

$\mathbf{14}$

ناظم أحد المستويين المتوازيين هو ناظم للآخر . و منه ناظم (P) هو $\vec{n}(-1; 2; 1)$

و بالتالي معادلة (P) هي : $-x + 2y + z - 2 = 0$

(1) المسافة بين النقطة A و المستويين (p) و (q) متساوية و تساوي $\frac{5}{\sqrt{6}}$ $\mathbf{30}$

(2) مجموعة النقط M من الفضاء المتساوية البعد عن المستويين (p) و (q) :

$$\text{نضع :} \quad \frac{|2x + y - z|}{\sqrt{6}} = \frac{|x - y + 2z|}{\sqrt{6}} \quad \text{ينتج} \quad |2x + y - z| = |x - y + 2z|$$

و بالتالي $3x + z = 0$ أو $x + 2y - 3z = 0$

أي مجموعة النقط هي إتحاد مستقيمين

الباب الثامن

لمستقيمات و المستويات في الفضاء

الأنشطة

النشاط الأول :

- الانتقال من جملة معادلتين ديكارتيتين لمستقيم أو معادلة ديكارتية لمستوي إلى تمثيل وسيطي و العكس
- تعيين تقاطع مستويين ، لمستقيم و مستوي ، لمستويين .

النشاط الثاني :

- تحديد الوضع النسبي لمستويين ، لمستقيم و مستوي ، لمستويين .

النشاط الرابع :

- تحديد الوضع النسبي لمستويين ، لمستقيم و مستوي ، لمستويين .
- تعيين تقاطع مستويين ، لمستقيم و مستوي ، لمستويين .

الأعمال الموجهة (1)

(ا) النقط هي $A(1; 2; 2)$ ، $B(3; 2; 1)$ و $C(1; 3; 3)$

(1) يكفي أن نتحقق أن الشعاعين \overrightarrow{AB} و \overrightarrow{AC} غير مرتبطين

أوجد شعاعا عموديا على \overrightarrow{AB} و \overrightarrow{AC} ثم استنتج معادلة ديكارتية للمستوي

(2) - يكفي أن نتحقق من أن ناظمي المستويين p_1 و p_2 غير مرتبطين و هما عموديان على $\vec{u}(2; 0; -1)$

- بكتابة $\overrightarrow{AM} \cdot \vec{u} = 0$ نحصل على معادلة من الدرجة الأولى بمجهول k حلها k_0 . النقطة M^0 من المستقيم

(Δ) هي المسقط العمودي للنقطة A على (Δ)

المسافة AM_0 هي المسافة بين النقطة A و المستقيم (Δ) .

الأعمال الموجهة (2) :

$$(1) \text{ أ) التمثيل الوسيطي هو الجملة التالية } (AB) : \begin{cases} x = -3t \\ y = 0 \\ z = 15 + 5t \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}$$

(ب) $y = z = 0$ ينتج $t = -3$ و منه نقطة التقاطع هي $E(9; 0; 0)$

$$(ج) \overrightarrow{AC} \begin{pmatrix} -3 \\ 20 \\ -10 \end{pmatrix} ، \overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix} \text{ إذن } \overrightarrow{AC} \text{ و } \overrightarrow{AB} \text{ غير مرتبطين}$$

تمارين

$$(1) \text{ الشعاع الناظم } \vec{n} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$(D): \begin{cases} x = 4+t \\ y = -2-t \\ z = 1+2t \end{cases} \quad t \in \mathbb{R} \quad (2)$$

(3) H نقطة تقاطع (P) و (D)

لدينا $(4+t) - (-2-t) + 2(1+2t) = 0$ ينتج $t = \frac{-4}{3}$ و منه

$$H\left(\frac{8}{3}, \frac{-2}{3}, \frac{-5}{3}\right) \quad 13$$

نضع $d = (A; \vec{u})$ مع $A(3;3;0)$ و $\vec{u}(2;1;1)$ و $d' = (B; \vec{v})$ مع $B(3;1;3)$ و $\vec{v}(1;2;-1)$

$$\overline{AB} = \alpha \vec{u} + \beta \vec{v} \quad \text{يكافئ} \quad \begin{cases} 2\alpha + \beta = 0 \\ \alpha + 2\beta = -2 \\ \alpha - \beta = 3 \end{cases}$$

تتناقض لا يمكننا من إيجاد قيمة كل من α و β يؤدي إلى $\begin{cases} \alpha = 1 \\ \beta = -2 \\ -3 = -2 \end{cases}$

و β

و منه المستقيمان ليسا من نفس المستوي .

ملاحظة : يمكن البحث عن تقاطعهما و ذلك بحل الجملة

$$\begin{cases} x = 3+2t \\ y = 3+t \\ z = t \\ t = 3-t' \\ t' = 6 \\ t' = -5 \end{cases} \quad \text{التي تؤدي الى} \quad \begin{cases} x = 3+2t' \\ y = 3+t' \\ z = t' \\ x = 3+t' \\ y = 1+2t' \\ z = 3-t' \end{cases}$$

تتناقض أيضا

و بالتالي المستقيمان غير متقاطعين و بما أن لهما شعاعا توجيه غير مرتبطين فهما إذن غير متوازيين و بالتالي هما ليسا من نفس المستوي

نضع (1) $\vec{n} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ هو الشعاع الناطم لدينا $\begin{cases} \vec{n} \cdot \overline{AB} = 0 \\ \vec{n} \cdot \overline{AC} = 0 \end{cases}$ مع $\overline{AB} \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$ و $\overline{AC} \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$ 57

$$\vec{n} \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{و منه} \quad \begin{cases} a = \frac{4}{3}b \\ c = \frac{1}{3}b \end{cases} \quad \text{أي} \quad \begin{cases} -a + 2b + 2c = 0 \\ -2a + 3b + c = 0 \end{cases} \quad \text{ينتج}$$

(2) ليكن $M(x; y; z)$ نقطة من المستوي حيث $\overline{AM} \cdot \vec{n} = 0$

و منه $4(x-1) + 3(y+1) + (z+1) = 0$ و بالتالي $(P): 4x + 3y + z = 0$

(1) المثلث قائم في A لأن $\overline{AB} \cdot \overline{AC} = 0$ 57

(2) الشعاع الناطم لـ (P) هو $\vec{n} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ و لدينا $\overline{AB} = 3\vec{n}$ إذن الشعاعان مرتبطان

و بالتالي (p) عمودي على (AB)

(3) $A \in (P'): ax + by + cz + d = 0$ معناه $d = -3a + 2b - 2c$

و مادام (P') عمودي على \overline{AC} فإن الشعاع الناظم لـ (P') و ليكن $\vec{n} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ مرتبط خطيا مع \overline{AC}

$$(P') : x - z = 0 \quad \text{ومنه}$$

$$\begin{cases} x = t \\ y = 3 - 2t \\ z = t \end{cases} \quad t \in \mathbb{R} \quad \text{ومنه} \quad \begin{cases} x = z \\ y = -2z + 3 \end{cases} \quad \text{ينتج} \quad \begin{cases} x + y + z - 3 = 0 \\ x - z = 0 \end{cases} \quad \text{لدينا (4)}$$

$$\vec{n} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{هو الشعاع الناظم لـ } ABC \quad \text{،} \quad \overline{AD} = \begin{pmatrix} -3 \\ 6 \\ -3 \end{pmatrix} \quad \text{لدينا } D(0; 4; -1) \quad \text{(II)}$$

بما أن $\overline{AD} = -3\vec{n}$ فالشعاعان مترابطان و منه $(AD) \perp (P')$

$$V = \frac{1}{3} S_{ABC} \times AD = 27 \quad (2)$$

الباب التاسع

المقاطع المستوية للسطوح

الأنشطة

النشاط الأول :

- تعيين معادلة سطح أسطوانة دوراني أو سطح مخروطي دوراني .

النشاط الثاني :

- تمثيل مقاطع مجسم مكافئ

النشاط الثالث :

- تعيين معادلة سطح أسطوانة دوراني أو سطح مخروطي دوراني .

- تعيين مقاطع اسطوانية أو مخروطية .

النشاط الرابع :

- تعيين مقاطع اسطوانية أو مخروطية.

النشاط الخامس :

النشاط السادس :

- تمثيل مقاطع مجسم مكافئ

الأعمال الموجهة (1)

عليك بتوفير البرمجية المناسبة و رؤية الشكل عن كئيب مع تحريكه في مختلف الاتجاهات/

الأعمال الموجهة (2) :

بالنسبة للمجدول يفضل الإكسال لوفرتة أما البرمجية فيوجد الكثير منها . المطلوب اختيار إحداها و التمكن منها و إعطاء الفرصة للتلميذ قصد تعويده عليها .

تمارين

5 (1) معادلة الأسطوانة $y^2 + z^2 = R^2$ و بما أنها تشمل النقطة A المعادلة تصبح $y^2 + z^2 = 13$

(2) تقاطع (C) مع $x = 2$ (p_1) هو دائرة نصف قطرها $\sqrt{13}$.

تقاطع (C) مع $y = -3$ (p_1) هو إتحاد مستقيمين موازيين لـ $(0; \vec{i})$.

تقاطع (C) مع $z = -4$ (p_1) مجموعة خالية .

7

$$(1) \text{ التمثيل الوسيطى لـ } (\Delta) \text{ هو } t \in \mathbb{R} \begin{cases} x = 2t \\ y = 0 \\ z = -t \end{cases}$$

و معادلة (C) هي من الشكل $x^2 + y^2 = k^2 z^2$ و لإيجاد k^2 يكفي إيجاد نقطة واحدة تنتمي ال (C)

و مادام (D) محتوى في (C) فيكفي أن تكون هذه النقطة من (D)

إذن من أجل $t = 1$ نجد النقطة $(2; 0; -1)$ و منه يكون $k^2 = 4$

و بالتالى المعادلة المطلوبة هي $x^2 + y^2 = 4z^2$

(2) أ) نحل الجملة $\begin{cases} x^2 + y^2 = 4z^2 \\ z = a \end{cases}$ ينتج $x^2 + y^2 = 4a^2$ و منه $4a^2 = 4$ و بالتالى $a = 1$

